# מערכת משוואות ליניאריות

### הגדרה

מערכת – מספר משוואות במקביל. x1 + 2x2+ x3 = 3

ליניאריות – שכל המשתנים בחזקה שווה, בדרך כלל בחזקת אחד. 2x1 + x2 + x3 = -3

### מטריצה

"מטריצה" היא מערכת של משוואות ליניאריות בה רושמים רק את המקדמים של המשתנים בצורת טבלה. "מטריצה מורחבת" היא מטריצה שבה מוסיפים גם את הפתרונות של המשוואות כאשר יש קו המפריד בין המשתנים לפתרונות.

כל שורה מייצגת משוואה, וכל טור מייצג משתנה מסוים לפי הסדר שלו במשוואה. במידה ובאחת המשוואות אין התחשבות במשתנה שיש בשאר המשוואות, נרשום בטור שלו 0.

### גודל המטריצה

כל מטריצה מאופיינת במספר שורות (מספר המשוואות) ובמספר עמודות (מספר המשתנים). מספר השורות מיוצג על יד האות i ומספר העמודות מיוצג על ידי האות j. כשנרצה לציין את גודל המטריצה נרשום כך: Ai,j. למטריצה A יש i שורות ו-j עמודות.

כל איבר במטריצה נקרא "רכיב" או "אלמנט" ומסומן ai,j כלומר שערכו a ונמצא בשורה i בעמודה j. גם ערך אחד יכול להיחשב מטריצה מסדר גודל של 1x1.

### פעולות אלמנטריות של מטריצה

1. כופלים או מחלקים את שני האגפים של שורה במספר שונה מ-0.
2. מוסיפים מכפלה של שורה אחת לשורה אחרת.
3. מחליפים מקומותיהן של שני שורות. ניתן גם להחליף שני טורים, אך אז צריך לסמן איזה משתנה מייצג כל טור.

### איבר מוביל

הוא האיבר הראשון בכל שורה השונה מ-0. יכול להיות מקרה בה לשורה מסוימת אין איבר מוביל, כלומר שכל השורה שווה ל-0.

### מטריצה מדורגת

כדי לפתור את המשוואות ולמצוא את המשתנים, יש "לדרג" את המטריצה. לשם כך צריכים להתקיים שני דברים:

1. כל שורות האפסים אם יש כאלו בתחתית המטריצה.
2. כל איבר מוביל הוא מימין לאיבר מוביל בשורה שמעליו.

לאחר שדירגנו את המטריצה נסתכל על השורות מלמטה למעלה, נחזיר את השורה למצב של משוואה ונמצא את המשתנה של אותה שורה. בכל שורה (מלבד האחרונה) נשתמש בפתרון של השורה הקודמת כדי למצוא את המשתנה.

### מטריצה מדורגת מצומצמת

כדי שתתקיים מטריצה מדורגת מצומצמת צריכים להתקיים 3 תנאים:

1. היא מדורגת, כלומר שכל שורות האפסים למטה וכל איבר מוביל הוא מימין לאיבר מוביל בשורה שמעליו.
2. כל איבר מוביל שווה ל-1.
3. האיבר המוביל הוא האיבר היחיד בעמודה שלו השונה מ-0.

### דרגת המטריצה

הדרגה של מטריצה היא מספר האיברים המובילים (שורות שונות מ-0) במטריצה המדורגת.

אם לדוגמא במטריצה A יש שלוש שורות שונות מ-אפס נאמר שהדרגה של מטריצה A היא שלוש, או rankA = 3.

### סוגי פתרונות

למערכת משוואות ליניאריות יכולים להיות שלושה סוגי פתרונות: פתרון יחיד, אינסוף פתרונות, אין פתרון.

**פתרון יחיד** - מתקבל כאשר דרגת המטריצה שווה למספר המשתנים.

**אינסוף פתרונות** - מתקבל כאשר הדרגה של המטריצה קטנה ממספר המשתנים. יכולים להיות שני מקרים:

1. במערכת המשוואות מלכתחילה מספר המשתנים גדול ממספר המשוואות, ואז נאמר שאחד המשתנים הוא "חופשי", כלומר יש לו אינסוף פתרונות.
2. מספר המשוואות שווה למספר המשתנים, אך במטריצה המדורגת קיבלנו שורת אפסים. במקרה זה אם גם התוצאה של שורה זו שווה ל-0 נאמר שיש אינסוף פתרונות.

**אין פתרון** – מתקבל כאשר יש שורת אפסים בה התוצאה שונה מ-0.

מערכת משוואות עם פרמטרים

במשוואות שנקבל בדרך כלל יהיה פרמטר אחד לפחות, וישאלו אותנו לאילו ערכים של הפרמטר יתקבלו: פתרון יחיד, אינסוף פתרונות, ואין פתרון. נשתמש בכללים בסעיף קודם כדי לענות על כך.

### מערכת הומוגנית

התוצאה של כל המשוואות שווה ל-0. במקרה זה לא יכול להיות מצב של "אין פתרון".

### פתרון טריוויאלי

כלומר שהפתרון של כל המשתנים במטריצה הוא 0.

# מטריצות

## חיבור מטריצות וכפל בסקלר

סכום של שתי מטריצות היא מטריצה שכל איבר בה הוא חיבור של שני האיברים משני המטריצות בהתאמה. לדוגמא: בחיבור המטריצות A ו-B האיבר הראשון יהיה AB1,1 = A1,1 + B1,1 וכן הלאה בכל האיברים.

מובן מדוע אם כן, ניתן לחבר רק שתי מטריצות שהן מאותו סדר גודל. חיבור מטריצות מסדר גודל שונה אינו מוגדר.

### כפל מטריצה בסקלר

כשכופלים מטריצה בסקלר מקבלים מטריצה שכל רכיביה מוכפלים באותו סקלר בנפרד.

### תכונות של חיבור מטריצות

תהי V קבוצת כל המטריצות מסדר m×n . לכל שלוש מטריצות A, B, C ∈ V ולכל סקלר k ∈ 𝐑

מתקיים:

א. חוק החילוף (קומוטוטיביות) - A + B = B + A

ב. חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות) - (A + B) + C = A + (B + C )

ג. חוק הפילוג (דיסטריביוטיביות) - k (A + B) = kA + kB

ד. A + (−A) = 0

## כפל מטריצות

כדי לכפול מטריצות צריך שמספר השורות של המוכפל יהיה שווה למספר העמודות של המטריצה שמכפילים בה. המטריצה שתתקבל תהיה עם מספר העמודות של המוכפל ועם מספר השורות של המכפיל.

כך לדוגמא: בכפולה של מטריצה Ai,j ב-Bm,n צריך להתקיים j=m, והמטריצה שתתקבל תהיה מסדר גודל של i x n. (כאשר:j = m ) Ai,j x Bm,n = ABi,n

### סדר הכפלת מטריצות

מכפילים את כל האיברים בשורה i של A בכל האיברים בעמודה n של B בהתאמה, סכום כל האיברים שיתקבלו יהיה האיבר במקום ABi,n . כך נעבור כל שורה של A שאנו מכפילים אותו בכל העמודות של B וממלאים את המטריצה AB.

### תכונות של כפל מטריצות

1. בכפל מטריצות A x B לא בהכרח שווה ל- B x A לכן חשוב לשים לב מי המוכפל ובמי מכפילים.
2. חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות) - (AB)C = A(BC). סדר ההכפלה לא חשוב כל עוד לא משנים מיקום.
3. חוק הפילוג (דיסטריביוטיביות) - A(B + C) = AB + AC

**צריך לשים לב לסדר ההכפלה!!** (B + C)A = BA + CA

## סוגי מטריצות

### מטריצת ה-0

מטריצה שבה כל הערכים שווים ל-0.

### מטריצה ריבועית

מטריצה שבה מספר השורות ( i ) שווה למספר העמודות ( j ). כלומר מטריצה מסדר n x n.

### מטריצה אלכסונית

מטריצה ריבועית שכל איבריה חוץ מאלכסון ראשי שווים ל-0. במטריצה זו מתקיים: Ai,j = 0 לכל i שונה מ-j.

|  |  |
| --- | --- |
| 0 | an |
| bn | 0 |

תכונות מטריצה אלכסונית: כשמעלים מטריצה אלכסונית A בחזקת n, מקבלים מטריצה אלכסונית שכל איבר באלכסון ראשי הוא בחזקת n. An =

### מטריצה משולשת

מטריצה שבה כל האיברים מעל\מתחת לאלכסון ראשי שווה ל-0.

אם כל האיברים מתחת אלכסון ראשי שווים ל-0 אז נאמר שהיא "מטריצה משולשת תחתונה", ומתקיים: ai,j = 0 לכל i > j. שזה במילים אחרות מטריצה מדורגת.

אם כל האיברים מעל אלכסון ראשי שווים ל-0 אז נאמר שהיא "מטריצה משולשת עליונה", ומתקיים: ai,j = 0 לכל i < j.

### מטריצת היחידה

מטריצה ריבועית ואלכסונית שכל רכיביה שווים ל-0 מלבד אלכסון ראשי שכל רכיביו שווים ל-1. מטריצה זו מסומנת באות גדולה I.

אם נכפיל מטריצה ריבועית במטריצת היחידה מאותו גודל, התוצאה תהיה אותה מטריצה בדיוק, כמו להכפיל מספר ב-1. במילים אחרות, מטריצת היחידה ניטרלית לכפל. A x I = I x A = A

### מטריצה משוחלפת

היא מטריצה שבה כל שורה הופכת להיות עמודה ואילו כל עמודה הופכת להיות שורה. כלומר ש: Ai,j = Aj,i. מטריצה משוחלפת מסומנת באמצעות האות t מעל שם המטריצה שהוא קיצור של המילה transpose (שחלוף) - At.

אם מטריצה A היא מסדר גודל של m x n אז המטריצה At היא מסדר גודל של n x m.

תכונות של מטריצה משוחלפת:

תהיינה A ו-B מטריצות ויהי k ∈ 𝐑 סקלר. אז מתקיים:

א. (A+B)t = At + Bt

ב. (At)t = A

ג. (kA)t = kAt

ד. (A x B)t = Bt x At כלומר (A x B)t ≠ At x Bt. בהכפלת מטריצות משוחלפות יש להחליף

את הסדר.

### מטריצה סימטרית

מטריצה משוחלפת ששווה למטריצת המקור.

### מטריצה אנטי סימטרית

מטריצה סימטרית, אלא שבכל האיברים השונים מ-0 פלוס הופך למינוס ומינוס הופך לפלוס.

## מושגים

### שוויון מטריצות

שתי מטריצות A, B נקראות שוות כלומר B = A אם הן מאותו סדר ואם כל רכיביהן שווים בהתאמה.

### אלכסון ראשי

הוא כל האיברים של המטריצה שבהן מספר השורה שווה למספר העמודה. אלכסון ראשי של מטריצה קיים בכל סוגי המטריצה גם אלו שאינם ריבועיות. ai,j כאשר i = j.

### עקבה (trace)

עקבה (trace) של מטריצה הוא סכום האיברים של האלכסון הראשי.

חוקים:

tr(A + B) = tr(A) + tr(B).

tr(A∙B) = tr(B∙A).

# מטריצה הפיכה והופכית

### הגדרה

מטריצה ריבועית A תקרא "מטריצה הפיכה" אם קיימת A-1 (הסימון למטריצה הופכית) כך שמכפלתם שווה למטריצת היחידה A x A-1 = I. אם תנאי זה מתקיים נאמר שמטריצה A היא מטריצה הפיכה, והמטריצה A-1 היא המטריצה ההופכית שלה. כמו כן מתקיים: A-1 x A = I.

לא כל מטריצה היא הפיכה, מטריצה שאינה הפיכה נקראת "מטריצה בלתי הפיכה" או "מטריצה סינגולרית". מטריצה הפיכה נקראת גם "מטריצה רגולרית".

לכל מטריצה הפיכה יש מטריצה הופכית אחת בלבד. לכן אם מתקיים: A x B = I וגם A x C = I, אז בהכרח B = C.

### מציאת מטריצה הופכית – שיטה 1[[1]](#footnote-1)

בונים מטריצה חדשה שמצד שמאל נמצאת מטריצה A, ומצד ימין מטריצת היחידה מאותו סדר גודל [ A | I ]. מדרגים אותה עד ש-A הופכת להיות מטריצת היחידה. המטריצה שתתקבל בצד ימין היא המטריצה ההופכית, וכך נוכל לקבוע כי מטריצה A היא מטריצה הפיכה.

אם לא הצלחנו לקבל את מטריצת היחידה על ידי דירוג אלא קיבלנו שורת אפסים במקום, נאמר שמטריצה A היא מטריצה בלתי הפיכה.

|  |  |
| --- | --- |
| b | a |
| d | c |

### מציאת מטריצה הופכית – שיטה 2

במטריצה מסדר גודל של 2 x 2 שנראית כך A =. אפשר להשתמש בנוסחה של כפל מטריצה בסקלר:

|  |  |
| --- | --- |
| -b | d |
| a | c- |

A-1 = 1 / (ad – bc) ∙

בתנאי שמתקיים: ad - bc ≠ 0 , אחרת ל-A אין מטריצה הופכית.

הערה - דרך נוספת לדעת אם מטריצה A היא הפיכה או לא היא דרך הדטרמיננטה של המטריצה. אם הדטרמיננטה שונה מ-0 המטריצה A הפיכה, ואם שווה ל-0 המטריצה A היא בלתי הפיכה.

### שימוש במטריצה הופכית

באמצעות המטריצה ההופכית ניתן למצוא פתרון של מערכת משוואות של המטריצה ההפיכה בצורה קלה. באמצעות הנוסחה A ∙ X = b כאשר A היא המטריצה ההפיכה, X הוא וקטור המשתנים (x1, x2, x3 וכו'), ו-b הוא וקטור הפתרונות של מטריצה A.

אם ידועה לנו המטריצה ההופכית נוכל להכפיל בה את הנוסחה בשני הצדדים מצד **שמאל** שלה ונקבל: A-1 ∙ A ∙ X = A-1 ∙ b. מכיוון שהביטוי בצהוב הוא בעצם מטריצת היחידה שהיא ניטרלית לכפל נקבל: **X = A-1** ∙ **b**. כעת, אם נכפיל את המטריצה ההופכית בוקטור הפתרונות, נקבל וקטור חדש שערכיו הם פתרונות המשוואה. לסיום, יש להציב את הפתרונות שקיבלנו במערכת המשוואות לוודא שהיא נכונה.

### תכונות מטריצה הפיכה והופכית

1. אם מתקיים A ∙ B = I אז גם מתקיים B ∙ A = I.
2. שתי מטריצות הפיכות מאותו גודל גם המכפלה שלהם הפיכה ותקיים: (A ∙ B)-1 = A-1 ∙ B-1.

ואילו מטריצה בלתי הפיכה גם המכפלה שלה בכל מטריצה אחרת היא בלתי הפיכה.

1. מטריצה הופכית של מטריצה סימטרית גם היא סימטרית.

### מציאת מטריצה במכפלה

בדומה לתהליך מציאת מטריצה הופכית, ניתן למצוא כל מטריצה המוכפלת במטריצה אם נתונה לנו אחת המטריצות ואת המטריצה המתקבלת ממכפלתם.

כך לדוגמא: אם ידועה לנו מטריצה A ומטריצה AB נוכל למצוא את מטריצה B על ידי שנבנה מטריצה חדשה [ A | AB ]. נדרג את A עד שנקבל את מטריצת היחידה. המטריצה שתתקבל בצד שמאל תהיה מטריצה B.

לסיום, נעשה בדיקה על יד הכפלת מטריצה A במטריצה B לוודא שאכן מקבלים את מטריצה AB.

# דטרמיננטות

## הגדרה

דטרמיננטה של מטריצה היא מספר יחיד המחושב מאיברי המטריצה ומכיל מידע שימושי על המטריצה. למשל, ניתן להסיק מתוך הדטרמיננטה האם המטריצה הפיכה או לא.

דטרמיננטה מוגדרת רק עבור מטריצות ריבועיות. דטרמיננטה של מטריצה A תסומן: |A| או det(A).

## חישוב דטרמיננטה

### מטריצה בגודל 2 x 2

מכפילים את שני האיברים באלכסון ראשי ומחסירים ממנו את המכפלה של האלכסון המשני. המספר שנקבל הוא הדטרמיננטה של מטריצה מסדר גודל של 2 x 2.

### מטריצה הגדולה מ 2 x 2

במטריצה זו נשתמש בטכניקה הנקראת "פיתוח לפי מינורים". נבחר או שורה או עמודה כלשהי במטריצה, לא משנה איזה, בכל פעם ניקח את המספר הראשון מאותה שורה או עמודה, נחסיר את העמודה והשורה שהמספר הראשון נמצא בה. המטריצה שנשארה נקראת "מינור Mi,j של "ai,j (המספר שבחרנו), אותה נכפיל במספר הראשון. כך נעשה בכל המספרים בשורה או עמודה שבחרנו בהתחלה. את סימני החיבור / חיסור קובעים על ידי חלוקה של המטריצה לסירוגין כאשר a1,1 הוא חיובי, וכן הלאה.

במטריצות הגדולות מ 3 x 3 יש לעשות פיתוח לפי שורה מספר פעמים עד שמגיעים למכפלה של מטריצה מסדר גודל של 2 x 2 אותה אנו יודעים לחשב. כדי להקל על החישובים נרצה תמיד לבחור שורה או עמודה שיש בה כמה שיותר אפסים.

כמו שנראה בסעיף הבא, ישנם פעולות על המטריצה שאינם משפיעות על הדטרמיננטה כלל. כאשר אנו מחשבים דטרמיננטה בדרך כלל נרצה להשתמש בפעולות אלו כדי לפשט את החישוב. במידה והשתמשנו בפעולה שמשנה את ערך הדטרמיננטה, יש לציין זאת, ובסוף להתחשב בשינוי זה כדי למצוא את הדטרמיננטה המקורית.

### סכום פרמוטציות

שיטה נוספת שלא כל כך שימושית, היא לסכום את כל "הפרמוטציות" במטריצה A מסדר גודל nxn. הפרמוטציות במטריצה הם כל הצירופים הקיימים שבהם ניתן לבחור n איברים כאשר כל איבר שבוחרים הוא היחיד בשורה ובעמודה שהוא נמצא. בכל מטריצה מסדר גודל nxn יש n! פרמוטציות (במטריצה עם 5 משתנים יש 120 פרמוטציות! לכן שיטה זו לא כל כך שימושית). הסימון החיובי או השלילי של כל פרמוטציה יהיה לפי מספר "הפיכות הסדר" שיש בה. הפיכת סדר פירושה מספר הפעמים שיש בפרמוטציה איבר שהוא משמאל ונמוך מאיבר אחר. אם מספר הפיכות הסדר זוגי הפרמוטציה חיובית ואם אי זוגי הפרמוטציה שלילית.

## פעולות במטריצות והשפעה על דטרמיננטה

|  |  |
| --- | --- |
| **פעולה** | **השפעה על |A|** |
| החלפת מקומותיהן של שתי שורות או שתי עמודות | |A|- |
| מכפילים שורה או עמודה במספר קבוע k | k x |A| |
| מוסיפים מכפלה של שורה או עמודה לשורה או עמודה אחרת.  **הערה - במטריצה רגילה ניתן לבצע פעולה זו רק על שורות, אך בדטרמיננטה ניתן לעשות זאת גם על עמודות.** | |A| |
| הכפלה של כל המטריצה במספר קבוע k | kn x |A| |

## חישוב דטרמיננטות במטריצות מיוחדות

במטריצה משולשת הדטרמיננטה שווה למכפלה של כל האיברים באלכסון הראשי.

## דטרמיננטה שונה מ-0

במטריצה שבה הדטרמיננטה שונה מ-0 יתקיימו כל הכללים הבאים:

1. המטריצה הפיכה ויש לה מטריצה הופכית.
2. למטריצה יש פתרון יחיד.
3. דרגת המטריצה שווה למספר המשתנים, כלומר אין שורות אפסים.

## דטרמיננטה השווה ל-0

כאשר שורה או עמודה היא מכפלה של שורה או עמודה אחרת במטריצה, הדטרמיננטה של אותה מטריצה תהיה שווה ל-0. וכן אם במטריצה יש שורה או עמודה של אפסים גם כן הדטרמיננטה תהיה שווה ל-0. |A| = 0.

במטריצה שבה הדטרמיננטה שונה מ-0 יתקיימו כל הכללים הבאים:

1. המטריצה לא הפיכה ואין לה מטריצה הופכית.
2. למטריצה אין פתרון יחיד אלא יש או אינסוף פתרונות או אין פתרון.
3. דרגת המטריצה קטנה ממספר המשתנים.

## תכונות של דטרמיננטה

1. det(A) = det(At) - דטרמיננטה של מטריצה שווה לדטרמיננטה של המטריצה המשוחלפת שלה.
2. det(A ∙ B) = det(A) ∙ det(B) - דטרמיננטה של מכפלת מטריצות שווה לכפולה של הדטרמיננטות שלהם לחוד.
3. det(𝛼 ∙ A) = 𝛼n ∙ det(A) - דטרמיננטה של מכפלת מטריצה בסקלר שווה לסקלר בחזקת גודל המטריצה כפול הדטרמיננטה של המטריצה.
4. det(An) = (det(A))n - דטרמיננטה של חזקה של מטריצה שווה לחזקה של הדטרמיננטה.
5. det(A-1) = 1/det(A) - אחד חלקי דטרמיננטה של מטריצה שווה לדטרמיננטה של ההופכית שלה.
6. det(I) = 1 - דטרמיננטה של מטריצת היחידה שווה ל-1.
7. det(A) ∙ det(A-1) = 1 - כפולה של דטרמיננטה של מטריצה בהופכית שלה שווה ל-1.
8. דטרמיננטה של מטריצות דומות שוות.

## כלל קרמר

### הגדרה

אם A היא מטריצה ריבועית שהדטרמיננטה שלה שונה מ-0, אז ניתן למצוא את הפתרונות של המשתנים (x1, x2, x3 וכו') באמצעות הנוסחה Xi = |Ai| / |A|. כאשר Xi הוא כל פעם משתנה אחר, |Ai| הוא הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת על ידי החלפת העמודה במקום ה-i בוקטור הפתרונות b של המטריצה, ו-|A| הוא הדטרמיננטה של המטריצה הרגילה A.

למערכת המשוואות ההומוגנית A ∙ X = 0, יש פתרון שונה מאפס אם ורק אם |A| = 0.

### מציאת איבר במטריצה הופכית

אחת מהשאלות שיכולים לשאול אותנו היא מהו האיבר ai,j במטריצה ?A-1 כלומר למצוא איבר ספציפי במטריצה ההופכית. באמצעות כלל קרמר ניתן לעשות זאת.

נסתכל על המשוואה A ∙ A-1 = I, אפשר להסתכל על משוואה זו בצורה שונה, A ∙ A-1j = Ij, כלומר מטריצה A כפול הוקטור בעמודה j במטריצה ההופכית שווה לוקטור המקביל בעמודה ה-j במטריצת היחידה.

במצב זה אנו יכולים להשתמש בכלל קרמר Xi = |Ai| / |A|. כאשר Xi הוא האיבר הספציפי אותו אנו מחפשים, |Ai| הוא הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת על ידי החלפת העמודה של מטריצה A במקום ה-i בוקטור Ij של מטריצת היחידה, ו-|A| הוא הדטרמיננטה של המטריצה הרגילה A.

## מטריצה מצורפת

תהי A מטריצה ריבועית מסדר גודל n x n. אזי המטריצה המצורפת של A, אותה נסמן adj(A) (מהמילה adjoint), גם היא מטריצה ריבועית מאותו גודל, כך שכל איבר בה ai,j מחושב לפי הדטרמיננטה של המינור Mj,i במטריצה A, הסימון חיובי או שלילי נקבע לפי (-1)i+j. במילים אחרות, לכל איבר בadj(A)- הנמצא בשורה i ועמודה j נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה A ללא השורה j והעמודה i. כך נעשה לכל האיברים. Adj(A)i,j = (-1)i+j∙det(Mj,i)

### שימוש במטריצה מצורפת

1. לכל מטריצה A מתקיים: A∙adj(A) = det(A)∙I.
2. מהמשפט הקודם ניתן לחשב מטריצה הופכית A-1 כך: A-1 = [1/det(A)]∙adj(A) .

# וקטורים

## הגדרה

וקטור הוא קבוצה של מספרים ממשיים מסודרים. כל איבר ממוספר מ-1 עד n, כאשר n הוא מספר האיברים בוקטור, יכול להיות מ-1 ועד אינסוף. גודל הוקטור נקרא גם מימד, "וקטור בעל מימד n".

סימון: u = (u1, u2, u3, …, un) כאשר ui ∈ 𝐑 (1≤i≤n). ui נקרא "רכיב" של הוקטור u.

## פעולות על וקטורים

### סכום וקטורים

סכום וקטורים הוא וקטור שרכיביו הם סכומים של רכיבי הוקטורים המחוברים בהתאמה. כלומר:

אם: u = (u1, u2, u3, …, un), v = (v1, v2, v3, …, vn) .

אז: u + v = (u1 + v1, u2 + v2, u3 + v3, …, un + vn).

סכום של וקטורים ממימדים שונים אינו מוגדר.

### מכפלה של וקטור בסקלר

מכפלת וקטור בסקלר הוא וקטור שרכיביו הם כפולות בסקלר של רכיבי הוקטור המוכפל. כלומר:

אם: u = (u1, u2, u3, …, un) , k ∈ 𝐑

אז: ku = (ku1, ku2, ku3, …, kun)

### מכפלה סקלרית

היא מכפלה בין שני וקטורים או יותר בעלי אותו מימד, התוצאה של המכפלה היא סקלר שהוא סכום מכפלות רכיבי הוקטורים המוכפלים בהתאמה.

אם: u = (u1, u2, u3, …, un) , v = (v1 ,v2, v3, …, vn)

אז: u ∙ v = u1∙v1 + u2∙v2 + u3∙v3 + ⋯ + un∙vn = ?

### תכונות של מכפלה סקלרית ושל וקטורים

יהיו u, v, w ∈ 𝐑n וקטורים, ויהי k ∈ R סקלר. אז מתקיים:

א. חוק החילוף (קומוטטיביות) - u ∙ v = v ∙ u

ב. חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות) - (ku) ∙ v = k(u ∙ v)

ג. חוק הפילוג (דיסטריביוטיביות) - u + v) ∙ w = u ∙ w + v ∙ w )

## סוגי וקטורים

### שוויון וקטורים

שני וקטורים u, v נקראים שווים כלומר u = v אם הם בעלי אותו מימד ואם כל רכיביהם שווים בהתאמה.

### וקטור ה-0

וקטור האפס הוא וקטור שכל רכיביו הם אפסים. כלומר: .(0, 0, 0, …, 0)

### וקטורים אורתוגונליים (ניצבים)

שני וקטורים נקראים ניצבים אם מכפלתם הסקלרית שווה 0 .

## מרחק, אורך ונורמה של וקטור

### מרחק בין וקטורים

מרחק בין וקטורים ב- 𝐑n הוא השורש של סכום ריבועי ההפרשים של כל רכיבי הוקטורים בהתאמה.

אם: u = (u1, u2, u3, …, un), v = (v1, v2, v3, …, vn) .

אז: [distance(u, v) = √[(u1 – v1)2 + (u2 – v2)2 + (u3 – v3)2 + ⋯ + (un – vn)2

### נורמה (אורך) של וקטור

אורך של וקטור ב- 𝐑n הוא שורש סכום ריבועי רכיביו.

אם: (u = (u1, u2, u3, …, un.

אז: u‖ = √(u ∙ u) = √[u12 + u22 + u32 + ⋯ + un2 ] ‖ (סימון לאורך של וקטור).

הערה: המרחק בין וקטורים הוא גם אורך וקטור ההפרש בין הוקטוריםd(u, v) = ‖u − v‖ .

### וקטור יחידה

הוא וקטור שאורכו הוא 1. כלומר, e הוא וקטור יחידה אם מתקיים: ‖e‖ = 1.

# מרחבים וקטוריים

## שדה מספרים

הוא קבוצה של מספרים מסוג מסוים. יכולים להיות אינספור שדות של מספרים משום שאפשר לקבוע אינספור הגדרות שונות לאילו מספרים אנו רוצים להכניס לשדה. מקובל לסמן שדה באמצעות האות F (Field). השדות הבסיסיים הם:

1. קבוצת המספרים הטבעיים - N
2. קבוצת המספרים השלמים - Z
3. קבוצת המספרים הרציונליים - Q
4. קבוצת המספרים הממשיים - R
5. קבוצת המספרים המרוכבים - C

בקורס זה נשתמש או בקבוצת המספרים הממשיים R או בקבוצת המספרים המרוכבים C.

## מרחב וקטורי

מרחב וקטורי S (Space) מעל שדה F (Field), הוא קבוצה של וקטורים שמוגדרות עליהם פעולות חיבור וכפל באברי השדה (סקלרים ממשיים R, או מרוכבים C), כך שלכל הוקטורים השייכים למרחב הוקטורי u, v, w ∈ S ולכל הסקלרים השייכים לשדה k1 ,k2 ∈ F , מתקיימים תשעת התנאים הבאים:

1. סגירות לחיבור: אם u, v ∈ S אזי גם u + v ∈ S .
2. סגירות לכפל בסקלר: אם u, v ∈ S ו-k ∈ F סקלר אזי גם k∙u ∈ S .
3. חוק החילוף (קומוטטיביות): u + v = v + u.
4. חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות) לחיבור: (u + v) + w = u + (v + w).
5. קיום איבר ניטרלי לחיבור, כלומר קיים איבר ב- S הנקרא "0" והמקיים:u + 0 = u לכל .u ∈ S במילים אחרות, המרחב S מכיל בתוכו את וקטור ה-0 באותו גודל .(0, 0, 0, …, 0) -
6. קיים איבר נגדי לחיבור, כלומר לכל u ∈ S קיים איבר -u ∈ S המקיים: u + (−u) = 0 .
7. סקלר היחידה, קיים איבר 1 ∈ F המקיים: 1 x u = u לכל u ∈ S .
8. חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות) לכפל בסקלר: (k1∙k2)u = k1(k2∙u)
9. חוק הפילוג (דיסטריביוטיביות): k1 + k2)u = k1∙u + k2∙u)

k(u + v) = k∙u + k∙v

אם ידוע לנו כי S הוא מרחב וקטורי אנו יכולים להניח כי מתקיימים בו כל תשעת תנאים אלו.

### המרחב הוקטורי הבסיסי

המרחבים הוקטוריים הבסיסיים הם מרחבים שהתנאי היחידי להיכלל בהם הוא שיש להם מספר רכיבים מסוים והם נמצאים מעל שדה המספרים הממשיים. מרחב וקטורי שיש לו רק רכיב אחד יקרא R1, ומרחב וקטורי שיש לו שני רכיבים יקרא , R2 וכו' עד n - (R1, R2, R3, …, Rn).

## תת מרחב

קבוצת איברים מתוך המרחב הוקטורי המהווה בעצמה מרחב וקטורי נקראת תת מרחב (W). תת מרחב הוא מרחב לכל דבר וגם בו מתקיימים כל תשעת התנאים שהזכרנו. אולם כדי לוודא שמרחב מסוים הוא תת מרחב אין צורך לבדוק את כל תשעת התנאים, אלא מספיק לוודא שלושה תנאים שאם מתקיימים בוודאי שגם כל השאר מתקיימים. שלושת תנאים אלו הם:

1. תת המרחב W מכיל בתוכו את וקטור ה-0 באותו גודל .(0, 0, 0, …, 0) -
2. סגירות לחיבור: אם u, v ∈ W אזי גם u + v ∈ W .
3. סגירות לכפל בסקלר: אם u, v ∈ W ו- k ∈ F סקלר אזי גם k∙u ∈ W .

אם שלושת תנאים אלו מתקיימים נוכל לקבוע בוודאות כי W הוא תת מרחב. בדרך כלל בתרגילים שנקבל המרחב הוקטורי W יהיה תת מרחב של Rn כלשהו שנמצא מעל שדה המספרים הממשיים.

### הצגה של תת מרחב

ישנן שתי אפשרויות של הצגה של תתי מרחבים:

1. מרחב הפתרונות של מערכת משוואות הומוגניות - נחלק לשני סוגים:
2. הצגה בסיסית של תת מרחב: {מערכת משוואותW = {( x1, x2, …, xn) ∈ Rn |

החלק השמאלי מתאר את גודלו של תת המרחב וסוגם של הערכים שנמצאים בו. בנוסף, כל רכיב בתת מרחב מקבל שם של משתנה. בצד הימני יש מערכת משוואות המהווה את התנאים שהרכיבים השייכים ל-W מקיימים, לדוגמא: x1 = x2 = x3.

1. הצגה באמצעות פרמטרים:𝛼1, 𝛼2, …, 𝛼n) ∈ Rn} ) | מערכת משוואות פרמטרית} W =

דומה להצגה בסעיף א', אלא שכאן מייצגים כל רכיב באמצעות מערכת משוואות של פרמטרים כלשהם, לדוגמא: (2𝛼1, 𝛼2 + 𝛼2, 𝛼1, -𝛼2). בצד ימין מתארים את סוגם של הפרמטרים בהם השתמשנו.

1. הצגה של תת מרחב באמצעות הוקטורים הפורשים אותו: W = span (w1, w2, …, wn).

## צירוף ליניארי

### הגדרה

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה סקלרים F, ויהיו הוקטורים v1, v2, …, vn ∈ V. אזי כל וקטור ב- V מהצורה k1∙v1 + k2∙v2 + ⋯ + kn∙vn כאשר k1, k2, …., kn ∈ F, נקרא צירוף ליניארי של הוקטורים v1, v2, …, vn.

צירוף ליניארי הוא בעצם תהליך של יצירת וקטור מתוך מספר וקטורים מהמרחב המוכפלים בסקלר. לאחר שנוצר וקטור זה, נאמר שהוא צירוף ליניארי של כל הוקטורים בהם השתמשנו ליצור אותו.

### האם וקטור הוא צירוף ליניארי

בחלק מן התרגילים יתנו לנו וקטור v ועוד מספר וקטורים v1, v2, …, vn, וישאלו האם הוקטור v הוא צירוף ליניארי של שאר הוקטורים?

לצורך כך נכפיל כל וקטור במשתנה אחר x1, x2, …, xn. נחבר את כל הרכיבים שבאותו המקום, וניצור מערכת משוואות שהפתרונות שלה הם רכיבי הוקטור v. נדרג את המטריצה וננסה למצוא את הפתרון של כל המשתנים. במידה ויש פתרון יחיד, נוכל לקבוע כי הוקטור v הוא צירוף ליניארי של שאר הוקטורים המתקבל מהמשוואה v = x1∙v1 + x2∙v2 + ⋯ + xn∙vn . במידה ואין פתרון יחיד, נאמר שהוקטור v הוא אינו צירוף ליניארי של שאר הוקטורים.

### כתיבת וקטור כצירוף ליניארי

בחלק מן התרגילים יתנו לנו וקטור v ועוד מספר וקטורים v1, v2, …, vn, ויאמרו לנו לכתוב את וקטור v בתור צירוף ליניארי של שאר הוקטורים הנתונים.

לצורך כך נעשה בדיוק את אותה הפעולה כמו בסעיף קודם, ולאחר שנדרג את המטריצה ונמצא את המשתנים, נרשום כך v = x1∙v1 + x2∙v2 + ⋯ + xn∙vn .

## תלות ליניארית

### הגדרה

נתונים n וקטורים v1, v2, …, vn, השייכים למרחב וקטורי V. הוקטורים נקראים תלויים ליניארית, אם קיימים n סקלרים **שלא כולם שווים ל-0** המקיימים: x1∙v1 + x2∙v2 + ⋯ + xn∙vn = 0. כלומר שעל ידי מכפלה סקלרית כלשהי של כל אחד מהוקטורים יש אפשרות שנקבל את וקטור ה-0 (0, 0, 0, …, 0), במידה וכן נקבע כי הוקטורים v1, v2, …, vn תלויים ליניארית.

אחרת, כלומר אם האפשרות היחידה שהמשוואה תהיה נכונה היא כאשר כל המקדמים שווים ל-0, הוקטורים נקראים בלתי תלויים ליניארית.

מושג התלות הליניארית קשור למושג צירוף ליניארי. אם הוקטורים תלויים ליניארית זאת אומרת שאפשר לכתוב כל אחד מהוקטורים הללו כצירוף ליניארי של הוקטורים האחרים, ולכן אגב הם נקראים תלויים ליניארית.

אם אחד הוקטורים, נניח v1 , הוא וקטור האפס, אזי תמיד הוקטורים יהיו תלויים ליניארית לפי הגדרה זו. שכן: k∙v1 + 0∙v2 + ⋯ + 0∙vn = 0, כאשר k יכול להיות כל מספר אפשרי, ולכן הם תלויים ליניארית משום שלא כל המקדמים שווים ל-0.

### בדיקת תלות ליניארית – שיטה 1

ישנם שתי שיטות לבדוק האם מספר וקטורים v1, v2, …, vn הם תלויים ליניארית. בשיטה הראשונה נכפיל כל וקטור במשתנה אחר x1, x2, …, xn. נחבר את כל הרכיבים שבאותו המקום, וניצור מערכת משוואות הומוגנית (שהפתרונות של כל המשוואות שלהם שווה ל-0). נדרג את המטריצה וננסה למצוא את הפתרונות של כל המשתנים.

במידה ומתקבל שלמטריצה יש אינסוף פתרונות או שיש פתרון יחיד ואחד מהמשתנים שונים מ-0, נוכל לקבוע כי הוקטורים v1, v2, …, vn הם תלויים ליניארית. במידה ומתקבל פתרון יחיד שבו כל המשתנים שווים ל-0, נוכל לקבוע כי הוקטורים הם בלתי תלויים ליניארית. במערכת משוואות הומוגנית אין אפשרות שהתוצאה תהיה "אין פתרון".

### בדיקת תלות ליניארית – שיטה 2

ניתן לבדוק תלות ליניארית בין וקטורים בדרך נוספת המחליפה את הצורך בפתרון מערכת משוואות.

רושמים את הוקטורים הנתונים בעמודות או בשורות ללא פתרונות, ומדרגים את המטריצה. אם מגיעים למטריצה שיש בה שורת אפסים - אז הוקטורים תלויים ליניארית. אם לא ניתן להגיע לשורה של אפסים - אז הוקטורים בלתי תלויים ליניארית.

### בדיקת תלות ליניארית – שיטה 3

שמים את כל הוקטורים במטריצה בתור עמודות ובודקים מהי הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת. כאשר דטרמיננטה שווה ל-0 זה אומר שיש תלות ליניארית, וכאשר דטרמיננטה שונה מ-0 אז הוקטורים בלתי תלויים ליניארית.

## בסיס ומימד

### בסיס

מרחב וקטורי V יקרא בעל מימד n אם ישנם n וקטורים v1, v2, …, vn בלתי תלויים ליניארית שפורשים (span) את V, כלומר שכל וקטור ב- V יכול להיכתב כצירוף ליניארי שלהם. במקרה זה קבוצת הוקטורים {v1, v2, …, vn} נקראת "בסיס למרחב הוקטורי".

במילים אחרות, "בסיס" של מרחב V הוא קבוצת כל הוקטורים המקיימים שני תנאים:

1. קבוצת הוקטורים פורשת את המרחב V, כלומר שבאמצעותם יכולים לבנות על ידי צירוף ליניארי את כל הוקטורים ב-V. במקרה זה נרשום: V = span (v1, v2, …, vn)
2. קבוצת הוקטורים v1, v2, …, vn הם בלתי תלויים ליניארית. תנאי זה הוא הכרחי משום שוקטורים התלויים לינארית פירושו שניתן להציג כל וקטור בהם באמצעות צירוף לינארי של הוקטורים האחרים, כלומר שיש וקטור מיותר. ולכן אם אנו רוצים לקבל את מינימום הוקטורים הפורשים את המימד עליהם להיות בלתי תלויים לינארית.

### מימד

"המימד" הוא מספר הוקטורים בבסיס. את המימד מסמנים באמצעות המילה "dim" (dimension): dimV = n. המימד מייצג כמה חופש יש להגדרת הוקטור, אם המימד 0 - סימן שיש רק וקטור אחד ויחיד שהוא בעצם נקודה. אם המימד אחד - יש חופש רק למשתנה אחד שהוא בעצם קו, כמו הוקטור v = (1, x). אם המימד שניים - יש חופש לשני משתנים, כמו הפונקציות המוכרות לנו של x ו-y. אם המימד שלוש - יש חופש לשלושה משתנים ואז מתקבל מרחב תלת מימדי כמו העולם שלנו. וכן הלאה ארבעה וחמישה מימדים.

**הערה** - לכל מרחב / תת מרחב יכולים להיות מספר רב של בסיסים אך המימד תמיד יהיה מספר קבוע.

### מימד ובסיס למרחב הוקטורי הבסיסי

למרחבים הוקטוריים הבסיסיים שהתנאי היחידי להיכלל בהם הוא שיש להם n רכיבים (R1, R2, R3, …, Rn), מאוד קל למצוא בסיס ומימד.

המימד הוא לפי מספר הרכיבים n של אותו מרחב וקטורי dimV = n. והבסיס יהיה n וקטורים שבכל אחד יהיה רכיב אחר השווה ל-1 וכל השאר אפסים. וקטורים אלו הם בלתי תלויים ליניארית וניתן לבנות באמצעותם כל וקטור בעל n רכיבים.

v1  = (1, 0, 0, …, 0); v2 = (0, 1, 0, …, 0); v3 = (0, 0, 1, …, 0); ⋯ ; vn = (0, 0, 0, …, 1).

### כללים חשובים

כאשר ידוע לנו מהו המימד של מרחב וקטורי V dimV = n)), ישנם שלושה כללים מאוד חשובים המייצגים את הקשר שבין התלות הליניארית לבסיס המרחב:

1. מספר הוקטורים בבסיס תמיד יהיה שווה לגודל המימד (n).
2. כל n + 1 וקטורים או יותר הם תלויים ליניארית.
3. כל n וקטורים בלתי תלויים ליניארית מהווים בסיס. לכן אם ידוע לנו גודל המימד ונתון לנו קבוצת וקטורים באותו גודל, ושואלים האם קבוצת הוקטורים היא בסיס לתת מרחב, כל שעלינו לעשות הוא לוודא שהוקטורים הם בלתי תלויים ליניארית והם בוודאי יהיו גם בסיס למרחב.

### מציאת בסיס ומימד

השיטה למציאת בסיס ומימד לתת מרחב משתנה בהתאם לדרך שבה מוצג התת מרחב (סעיף ג').

1. מרחב הפתרונות של מערכת משוואות הומוגניות - מחולק לשני סוגים:
2. הצגה בסיסית של תת מרחב: {מערכת משוואותW = {( x1, x2, …, xn) ∈ Rn |

מציבים את מערכת המשוואות במטריצה ומחשבים את ערכם של x1, x2, …, xn באמצעות פרמטרים. מוצאים איך נראה וקטור ב-W. מפרקים וקטור זה לפי מספר הפרמטרים שבו כאשר כל וקטור מוכפל בפרמטר אחר. לוקחים את הוקטורים בלבד ללא הפרמטרים שלהם. וקטורים אלו הם בסיס ל-W ומספרם הוא המימד.

**הערה** - גודל המימד יהיה כמספר האיברים המובילים החופשיים.

1. מוצאים איך נראה וקטור ב-W. מפרקים וקטור זה לפי מספר הפרמטרים שבו כאשר כל וקטור מוכפל בפרמטר אחר. לוקחים את הוקטורים בלבד ללא הפרמטרים שלהם ומציבים במטריצה. לבסוף, מדרגים את המטריצה. כל השורות שנשארו שאינם שורת אפסים הם בסיס ל-W ומספרם הוא המימד.
2. הצגה של תת מרחב באמצעות הוקטורים הפורשים אותו: W = span (w1, w2, …, wn).

מציבים במטריצה את כל הוקטורים הנתונים שפורשים את W, כל וקטור הוא שורה נפרדת, ומדרגים. כל השורות שנשארו שאינם שורת אפסים הם בלתי תלויים ליניארית ולכן מהווים בסיס ל-W ומספרם הוא המימד.

## תרגילים שונים

### מציאת מערכת משוואות של תת מימד

מבין שלושת הצורות של הצגת תת מרחב, רק באחת מהן (1-א) נתונה מערכת המשוואות של התת מרחב כבר מהתחלה. לכן בהצגות האחרות (1-ב, ו-2) אחת השאלות שיכולים לשאול היא "מצא את מערכת המשוואות של התת מרחב".

כדי למצוא את מערכת המשוואות ניקח את וקטורי הבסיס ונכפיל כל אחד במשתנה אחר 𝛼1, 𝛼2, …, 𝛼n. נשווה אותם לוקטור שבו יהיו כל משתני התת מרחב W - x1, x2, …, xn. התוצאה תהיה מערכת משוואות שהפתרונות שלה הם רכיבי התת מרחב. נעביר את המערכת למטריצה ונדרג.

נחפש מהם התנאים אשר לפיהם לערכים של רכיבי התת מרחב יוצא שלמטריצה זו יש פתרון. נשווה אותם ל-0, ונקבל מערכת משוואות הומוגנית שהיא מערכת המשוואות של תת מרחב W.

**הערה** - כשהמימד של התת מרחב קטן מהמימד של הבסיס הטבעי Rn, הפרש זה יתבטא במספר המשוואות של התת מרחב. **מספר משוואות | Rn | - dim(v) =.** לדוגמא: בתת מרחב בו גודל הוקטורים הוא 3 והמימד הוא 2, מספר המשוואות יהיה 3-2=1.

### מציאת וקטור משותף

שאלה נוספת שאפשר לשאול היא "מצא וקטור השייך לשני תתי מרחב שונים U ו-W מאותו סדר גודל". כדי שוקטור מסוים יהיה שייך לשני תתי מרחב שונים הוא צריך לקיים את מערכת המשוואות של שניהם. על כן, ניקח את כל המשוואות נציב במטריצה ונדרג. נמצא את הפתרונות של כל רכיבי המרחבים x1, x2, …, xn, ונציבם בוקטור אחד. וקטור זה הוא וקטור השייך לשני המרחבים U ו-W.

### תת מרחב מוכל בתת מרחב אחר

כדי לבדוק האם תת מרחב U מוכל בתת מרחב אחר V, נבדוק האם הבסיס של U מקיים את המשוואה שמגדירה את V. כלומר נציב את הבסיס במשוואה. במידה והמשוואה נכונה נאמר ש-U מוכל בתוך V.

במידה וגם גודל המימדים שלהם שווים, נאמר ששני תתי המרחב שווים.

### וקטור אורתוגונלי לתת מרחב

שני וקטורים נקראים "אורתוגונליים" (ניצבים) אם מכפלתם הסקלרית שווה 0 . כדי למצוא וקטור ניצב לתת מרחב W, צריך למצוא וקטור שהמכפלה הסקלרית שלו עם כל אחד מוקטורי הבסיס של התת מרחב שווה ל-0.

לכן ניקח וקטור של משתנים x1, x2, …, xn בגודל של התת מרחב ונכפיל אותו בכל אחד מוקטורי הבסיס של התת מרחב ונשווה ל-0, מה שייתן לנו מערכת של משוואות, אותה נציב במטריצה (המשמעות של פעולה זו היא בעצם לקחת את כל וקטורי הבסיס ולהציבם כשורות במטריצה). נדרג את המטריצה ונמצא את הערכים של המשתנים x1, x2, …, xn.. נציב את כל הערכים שקיבלנו בוקטור, והוא יהיה הוקטור האורתוגונלי לתת מרחב. בדרך כלל יהיו פרמטרים a1, a2 וכו', לכן נציב ערך כלשהו של הפרמטרים ונקבל וקטור של מספרים שהוא אורתוגונלי לתת מרחב W.

לבסוף נבצע בדיקה אם הוקטור שמצאנו הוא אכן ניצב לתת מרחב, על ידי שנכפיל את הוקטור בכל אחד מוקטורי הבסיס של התת מרחב, ונוודא שבכל אחד יוצא 0.

## חיתוך של תתי מרחבים

נתונים שני תתי מרחבים U ו-W השייכים ל- Rn. החיתוך של שני תתי מרחבים אלו - V הוא גם תת מרחב השייך ל- Rn המקיים את מערכת המשוואות של שני תתי המרחבים במקביל. חיתוך של תתי מרחבים הוא בעצם תת מרחב השייך גם לU וגם ל-W.

כדי למצוא בסיס ומימד לU ו-W נמצא מערכת משוואות ל-U ומערכת משוואות ל-W, ניקח את כל המשוואות ונציבם ביחד במטריצה ונדרג. נמצא את הפתרונות של כל רכיבי המרחבים x1, x2, …, xn, ונציבם בוקטור אחד. כך נמצא וקטור המקיים את התנאים של U וגם את התנאים של W. נפרק וקטור זה לפי מספר הפרמטרים שבו כאשר כל וקטור מוכפל בפרמטר אחר. לוקחים את הוקטורים בלבד ללא הפרמטרים שלהם. וקטורים אלו הם בסיס לחיתוך של תתי המרחבים (V) ומספרם הוא המימד.}

## סכום ישר של תתי מרחבים

אם החיתוך של שני תתי המרחבים U ו-W, שנקרא לו V, הוא וקטור ה-0 ((0, 0, 0, …, 0, מה שאומר שגם המימד שלו שווה ל-0 (dimV = 0), אז הסכום של U + W הוא "סכום ישר". במקרה של סכום ישר מתקיימת הנוסחה: dimU + dimW = dim(U + W). כלומר המימד של תת המרחב U + W שווה לחיבור של המימדים שלהם בנפרד. אם (u1, u2, u3, …, un) הוא הבסיס של תת המרחב U, ו- (w1, w2, w3, …, wn) הוא הבסיס של תת המרחב W, אז הבסיס של תת המרחב U + W הוא: u1, u2, u3, …, un, w1, w2, w3, …, wn)), כלומר אין וקטורים מיותרים.

## חיבור מרחבים

אם U ו-W מרחבים וקטוריים אז:

1. האיחוד של שני המרחבים לא יהיה מרחב אלא אם כן אחד מוכל בשני, שאז נקבל פשוט את המרחב הגדול מבניהם.
2. U + W יהיה מרחב וקטורי, גודל המימד הוא:dim(u + w) = dim(u) + dim(w) - dim(uw) .

# ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

## הגדרה

נתונה מטריצה ריבועית Ln,n מסדר גודל של n x n, ותת מרחב וקטורי V השייך למימד הוקטורי Rn. אם קיים וקטור 𝛼 ∈ V שאינו וקטור האפס המקיים את המשוואה: 𝐿∙𝛼 = 𝜆∙𝛼, כאשר 𝜆 הוא סקלר, אזי הוקטור 𝛼 נקרא "וקטור עצמי" ((eigenvector של L , ו- 𝜆 נקרא "ערך עצמי" ((eigenvalue של L.

## המשוואה האופיינית של L

### הגדרה

אם נתונה לנו מטריצה ריבועית L כלשהי אנו יכולים למצוא את כל הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של אותה מטריצה באמצעות המשוואה האופיינית של אותה מטריצה.

נוסחת המשוואה האופיינית היא: |𝐿 − 𝜆∙𝐼| = 0 . כלומר, הדטרמיננטה של המטריצה L פחות המכפלה של הערך העצמי 𝜆 במטריצת היחידה מאותו סדר גודל של המטריצה L, שווה ל-0.

### מציאת ערך עצמי

באמצעות המשוואה האופיינית ניתן למצוא את הערך העצמי של L. ניקח את מטריצת היחידה ונכפיל אותה במשתנה 𝜆, המשמעות היא שבאלכסון ראשי במקום שיהיה 1 כעת יהיה 𝜆. נחסיר את המטריצה L ממטריצה זו, ונחשב את הדטרמיננטה של המטריצה שקיבלנו. נשווה את משוואת הדטרמיננטה ל-0, ונמצא את ערכו של 𝜆. הפתרונות שקיבלנו הם הערכים העצמיים של L.

### מציאת וקטור עצמי

לאחר שמצאנו את הערכים העצמיים, נוכל למצוא את הוקטורים העצמיים 𝛼. כדי למצוא את הוקטורים העצמיים צריך לפתור: L∙𝛼 = 𝜆∙𝛼או בצורה יותר נוחה: (L − 𝜆∙𝐼) 𝛼 = 0. ניקח שוב את המטריצה L ונחסיר אותה מהמכפלה של מטריצת היחידה במשתנה 𝜆, כמו שעשינו בסעיף קודם.

לאחר מכן נכפיל בכפל מטריצות את המטריצה שקיבלנו בוקטור 𝛼, שהוא וקטור של משתנים בגודל של n: x1, x2, …, xn. התוצאה של מכפלה זו תהיה וקטור עם n רכיבים, כאשר כל רכיב מיוצג על ידי משוואה של משתנים. מכיוון שהתוצאה צריכה להיות שווה לוקטור ה-0, נשווה כל משוואה בנפרד ל-0, מה שייתן לנו מערכת הומוגנית של n משוואות עם n משתנים (המשמעות של כל פעולות אלו היא לקחת את המטריצה לאחר שהחסרנו ממנה את 𝜆 ולהציב במטריצה הומוגנית). נפתור את המטריצה ונמצא את המשתנים, נציב אותם חזרה בוקטור 𝛼, במידה והוא **אינו וקטור ה-0**, נפרק את 𝛼 לפי מספר הפרמטרים החופשיים שבו. ניקח רק את הוקטורים, כל וקטור כזה נאמר שהוא הוקטור העצמי של L עבור הערך העצמי 𝜆.

במקרים בהם יש יותר מערך עצמי אחד יש להציב כל פעם את ערך עצמי אחר ולמצוא את הוקטור העצמי של L עבור אותו ערך עצמי 𝜆1, 𝜆2, …, 𝜆n.

### מכפלת מטריצות

תהיינה 𝐴 ו- 𝐵 מטריצות ריבועיות מסדר גודל של n x n. אזי ל- 𝐴∙𝐵 ול- 𝐵∙𝐴 יש אותם ערכים עצמיים. אולם יש לשים לב שהוקטורים העצמיים של 𝐴∙𝐵 ושל 𝐵∙𝐴 אינם שווים.

## לכסון מטריצות

נתונה מטריצה ריבועית Ln,n מסדר גודל של n x n. מטריצה L ניתנת ללכסון אם ורק אם יש לה סך הכל של n וקטורים עצמיים בלתי תלויים ליניארית. במקרה שתנאי זה מתקיים, המטריצה המלכסנת 𝑃 היא מטריצה מסדר גודל של n x n שעמודותיה הן הוקטורים העצמיים.

## מטריצה דומה / לכסינה

מטריצה לכסינה D למטריצה L היא מטריצה ריבועית אלכסונית שכל איבריה באלכסון ראשי הם ערכים עצמיים של L.

מטריצה לכסינה היא מקבילה למטריצה מלוכסנת, לכן חשוב לשמור על הסדר, כלומר לשים את הערך העצמי באותו הטור שבו שמנו את הערך העצמי המתאים לו.

## משוואת דמיון מטריצות

כאשר ידועה לנו מטריצה L שיש לה מטריצה מלוכסנת P ומטריצה לכסינה D מתקיימת המשוואה:

L = P∙D∙P-1, כאשר P היא המטריצה המלוכסנת, P-1  היא המטריצה ההפיכה למטריצה המלוכסנת, ו-D היא המטריצה הלכסינה.

**הערה** - חשוב לשים לב שלא משנים את סדר ההכפלה של המטריצות במשוואה.

כשמעלים מטריצה שמקיימת תנאים אלה בחזקת n אז מקבלים את המשוואה: Ln = P∙Dn∙P-1

# מספרים מרוכבים

## הגדרה

מספר מרוכב הוא מספר המורכב משני חלקים מהצורה: z = a + b∙i. כאשר a ו-b הם מספרים ממשיים, ו-i מסמל את השורש הריבועי של -1.

החלק הראשון a שאינו תלוי ב-i נקרא "החלק הממשי" של המספר המרוכב.

החלק השני b נקרא "החלק המדומה" של המספר המרוכב.

## מספר צמוד למספר המרוכב

"מספר צמוד" הוא מספר שבו מוחלף הסימן של החלק המדומה בלבד, ממינוס לפלוס ומפלוס למינוס. החלק הממשי נותר ללא שינוי. מסמנים מספר צמוד עם קו מעל האות z.

דוגמאות:

מספר מרוכב z1: 1 + 2i. מספר צמוד ל-z1: 1 - 2i.

מספר מרוכב z2: 2 - 3i. מספר צמוד ל-z2: 2 + 3i.

## המישור המרוכב

ניתן להציג מספר מרוכב אחד כנקודה מסוימת במערכת צירים, כאשר ציר ה-x הינו החלק הממשי וציר ה-y הינו החלק המדומה (a, b).

כך לדוגמא: את המספר המרוכב 1 + 2i ניתן להציג במערכת צירים בנקודה (1, 2).

## נורמה

נורמה של מספר מרוכב מגדירה את המרחק של הנקודה המייצגת של המספר המרוכב מראשית הצירים (0, 0). הנוסחה לחישוב הנורמה נובעת ממשפט פיתגורס והיא: |z| = √(a2 + b2) (סימון לנורמה).

משפט - כשמכפילים מספר בצמוד שלו מקבלים את הנורמה של המספר המרוכב בריבוע |z|2.

## פעולות על מספרים מרוכבים

### חיבור וחיסור

בחיבור שני מספרים מרוכבים מחברים את החלקים הממשיים בנפרד ואת החלקים המדומים בנפרד.

לדוגמא: (2 + 1i) - (-3 - 6i) = (5 + 7i)

### כפל

כפל של שני מספרים מרוכבים יהיה לפי חוק הפילוג:

(a + bi) ∙ (c + di) = a∙c + a∙di + bi∙c + b∙d∙i2. כאשר i הוא שורש ריבועי של -1 ולכן i2 שווה ל--1. לבסוף נחבר את חלקים הממשיים ואת החלקים המדומים ונקבל את הכפל של המספר המרוכבים.

החלק הממשי יהיה: a∙c + b∙d∙i2) = (a∙c - b∙d)).

והחלק המדומה יהיה: (a∙di + bi∙c).

### חילוק

אין אפשרות לחלק מספר מרוכב במספר מרוכב אחר, אמנם אפשר לחלק מספר מרוכב במספר ממשי כאשר מחלקים כל חלק בנפרד.

יש שיטה לחלק שני מספרים מרוכבים, והיא להכפיל את המונה והמכנה במספר הצמוד של המכנה. בדרך זו נקבל במכנה מספר ממשי ולא מספר מרוכב, ואז נוכל לחלק את המונה ולהגיע לפתרון. שיטה זו נקראת "כפל בצמוד" (מזכירה מאוד את השיטה לפתיחת שורשים).

## שימוש במספרים מרוכבים בוקטורים, מטריצות, ומרחבים וקטוריים.

בכל הנושאים השונים שעסקנו בהם עד עכשיו, הצגנו אותם באמצעות סקלרים (מספרים רגילים), אמנם אפשר להציג אותם גם באמצעות מספרים מרוכבים.

דרך הפתרון של התרגילים תהיה זהה לדרך שלמדנו עד עכשיו, אלא שאת הפעולות על המספרים המרוכבים נעשה לפי החוקים שלמדנו בסעיף קודם.

1. יש עוד שני שיטות נוספות שנלמד בהמשך למציאת מטריצה הופכית שיטה ראשונה נלמד בפרק על דטרמיננטות, ושיטה שנייה בלינארית 2 באמצעות משפט קיילי – המילטון. [↑](#footnote-ref-1)